

# MODELLEK KÜLÖNLEGES STABILITÁSVESZTÉSEK SZEMLÉLTETÉSÉRE

Gáspár Zsolt\* - Németh Róbert\*\*

## RÖVID KIVONAT

A rugalmas szerkezetek stabilitásvesztéseinek típusait egyszeru modelleken szokták szemléltetni. Ebben a cikkben két olyan stabilitásvesztési típusra (a dombtető-pont és a kettőscsúcs-katasztrófa egyik alelete) mutatunk be egy-egy modellt, amelyre az irodalomban nem láttunk szerkezeti példákat. A dombtető-pont esetén bemutatjuk a tökéletlenségérzékenységi felületet, a tökéletes szerkezet egyensúlyi útjait, valamint egy tipikus tökéletlenség hatását. A kettőscsúcs-katasztrófa esetén csak az egyensúlyi utakat elemezzük: a tökéletes szerkezetnél és egy sor speciális tökéletlenség esetén is.

## 1. AZ EDDIG ISMERT ESETEK

A rugalmas szerkezetek stabilitásvizsgálatainak legfontosabb módszereit, a stabilitás-vesztés leggyakoribb típusait hazánkban nagyon sokan Halász [1] jegyzetéből tanulták meg. Ezek az elvek sokkal részletesebben, már kiegészítve a valódi acélszerkezetek viselkedésének modellezésénél szükséges anyagi, geometriai, terhelési tökéletlenségek hatásának bemutatásával nemrég jelentek meg könyv formájában is [2].

A stabilitásvesztés típusait legjobban egyszeru modellek elemzésével lehet bemutatni. Ezt tette Koiter [3] a híres disszertációjában, illusztrálva a határpontnál, az aszimmetrikus valamint a stabilis és labilis szimmetrikus elágazásnál bekövetkező stabilitásvesztést, a tökéletlenségek hatását. Augusti modelljénél [4] a két kritikus paraméter megegyezik, vagyis kétszeres kritikus pont jön létre. Thompson és Hunt [5] bevezeti az egyhajlású, azonos hajlású és az ellenhajlású elágazási pont fogalmát, a hozzájuk tartozó energiafüggvényeket részletesen elemzik, de csak később [6] mutatnak szerkezeti példákat, sőt az azonos hajlású elágazásra akkor sem.

A katasztrófaelmélet megjelenése [7, 8] matematikailag megalapozottabbá tette a stabilitásvesztések osztályozását, korábban nem vizsgált osztályokat is bevezetett. Egy alul csuklóval, felül két rugóval megtámasztott merev síkbeli rúd a kritikus tehernél végtelen degeneráltságot mutat: a másodlagos egyensúlyi út egy vízszintes egyenes, így ezzel a szerkezettel speciális tökéletlenségeket figyelembe véve az összes csúcsszerű katasztrófához tartozó elágazási típus bemutatható ([9], [10] 240. oldal).

Térbeli rudat vizsgálva már a kétszeres kritikus terhek is elemezhetők. Ha a rúd tetejét három megfelelő merevségű rugóval támasztjuk meg, akkor a rugók helyzetét

---

\* okl. építőmérnök, okl. alk. matematikus, az MTA rendes tagja, egyetemi tanár, BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

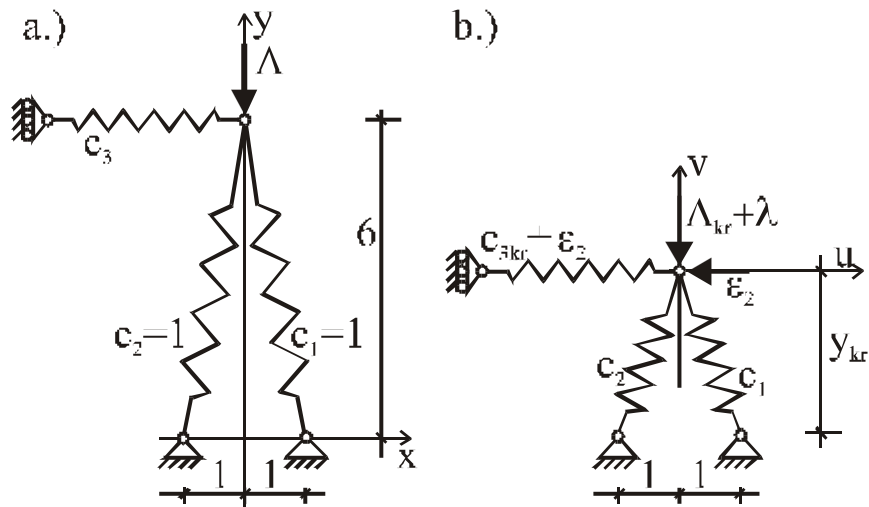
\*\* okl. építőmérnök, egyetemi tanársegéd, BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

folyamatosan változtatva a köldökszerű katasztrófák típusai, és ennek bizonyos alosztályai szemléltethetőek ([11], [10] 241. oldal). Ha a rugók számát növeljük, akkor a kettőscsúcs-katasztrófa két típusára kapunk példát ([12], [10] 247. oldal).

## 2. A DOMBTETO TÍPUSÚ ELÁGAZÁSI PONT SZEMLÉLTETÉSE

A fent említett háromrugós térbeli modell ([11], [10] 241. oldal) létrehozza a hiperbolikusköldök-katasztrófa három esetét: az azonos hajlású, az egyhajlású elágazási pont és a háromszoros gyök esetét is. [13] bevezeti a dombteto típusú elágazási pont esetét is, de arra nem szerkezeti példát mutat, hanem egy kristályrácsot mutat be. A következőkben a dombteto típusú elágazási pont elemzésére egy három rugóból álló kétszabadságfokú szerkezetet vizsgálunk meg.

Az 1. ábrán látható helyzetben (terheletlen állapotban) feszültségmentesek a tökéletesnek tekintett szerkezet rugói. A ferde rugók egyforma merevségűek, az ero egységét úgy választjuk, hogy  $c_1=c_2=1$  legyen. A  $c_3$  értékét úgy választjuk, hogy dombteto típusú elágazási pont jöjjön létre. A tökéletes szerkezetet egy függőleges, lefelé mutató ero terheli, melynek a nagyságát jelölje  $L$ . A szerkezet állapotát a terhelt pont koordinátaival jellemezzük. Ehhez felvesszünk egy  $xy$  koordinátarendszert, melyben a vízszintes  $x$  tengely az első két rugó fix végeit összekötő szakaszt tartalmazza, a függőleges  $y$  tengely ugyanezen szakasz felező merőlegesére.



1. ábra: A háromrugós modell a terheletlen (a) és a kritikus (b) állapotban

A tökéletes szerkezet potenciális energiáját  $V$ -vel jelöljük, és a három rugó közös pontjának helyzetét megadó állapotváltozóknak, a teherparaméternek és a vízszintes rugó merevségének a függvényében írjuk fel:

$$V(x, y, \Lambda, c_3) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(1-x)^2 + y^2} - \sqrt{37} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{37} \right)^2 + \frac{1}{2} c_3 x^2 + \Lambda y. \quad (1)$$

A függvény  $x$  és  $y$  szerinti első deriváltjai az egyensúlyi helyzetekben zérusok. A kritikus pontban a függvény Hesse-mátrixa válik szingulárisá. Minket most olyan

kritikus pont érdekel, melyben a Hesse-mátrix mindkét sajátértéke zérus lesz. A szerkezet szimmetriája miatt  $x=0$ -nál  $V_x=0$  és  $V_{xy}=0$ . (A  $V$  alsó indexe mindig a megfelelő változó szerinti deriválást jelöli.) A  $V$  függvény másik három változójának kritikus értékét az alábbi három feltételből határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} V_y(0, y, \Lambda, c_3) &= 0, \\ V_{xx}(0, y, \Lambda, c_3) &= 0, \\ V_{yy}(0, y, \Lambda, c_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyik megoldása  $y_{kr}=1,52716137$ ,  $L_{kr}=7,1233582$ ,  $c_{3kr}=2,6644437$ .

E kritikus állapotot mutatja az 1.b. ábra, melyen az ettől az állapottól való eltérést is értelmezzük. Vagyis a kritikus helyzettel való vízszintes eltolódást  $u$ -val, a függőlegest  $v$ -vel jelöljük. Fejtsük Taylor-sorba a potenciálfüggvényt a kritikus pont körül, majd csonkoljuk a harmadfokú tagokig! A konstans taggal nem foglalkozunk, az első és második deriváltaknak pedig zérusnak kell adódnia. Valóban, a függvény az alábbi alakot ölti:

$$j^3V(u, y_{kr} + v, \Lambda_{kr}, c_{3kr}) = 0,45830123 \cdot v^3 + 0,15225768 \cdot u^2v. \quad (3)$$

A továbbiakban a  $v^3$  együtthatóját  $A$ -val,  $u^2v$  együtthatóját  $B$ -vel jelöljük a könnyebb átláthatóság érdekében. A fenti függvény gyökei alapján minősíthetjük a kritikus pontot ([10], 172. o.). Mivel csak egy valós gyöke van ( $v=0$ ), a kritikus pontban hiperbolikus köldök-katasztrófa van. Ennek kinyitásához három paraméterre van szükség. Az első legyen a teherparaméter változása ( $I=L-L_{kr}$ ), a második egy kicsiny vízszintes teher ( $\varepsilon_1$ ), a harmadik a vízszintes rugó merevségének eltérése a kritikus értéktől ( $\varepsilon_2$ ). Értelmezésük megértését könnyíti az 1.b. ábra. Az így kapott tökéletlen szerkezet potenciális energiafüggvényét az előbb meghatározott kritikus pont környezetében Taylor-sorba fejtjük. A katasztrófaelmélet szerint a függvény lényeges tulajdonságait lokálisan meghatározza a 3-szelete, melyet  $U$ -val jelölünk:

$$U(u, v, I, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = A \cdot v^3 + B \cdot u^2v + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot u^2 + I \cdot v + \varepsilon_1 \cdot u. \quad (4)$$

Hiperbolikus köldök-katasztrófa esetén a függvény kanonikus alakja a következő alakú:

$$f(X, Y, a, b, c) = X^3 + Y^3 + aXY + bX + cY, \quad (5)$$

melynek elágazási halma0zát a  $(p, q)$  paraméterekkel lehet leírni ([10], 175. o.):

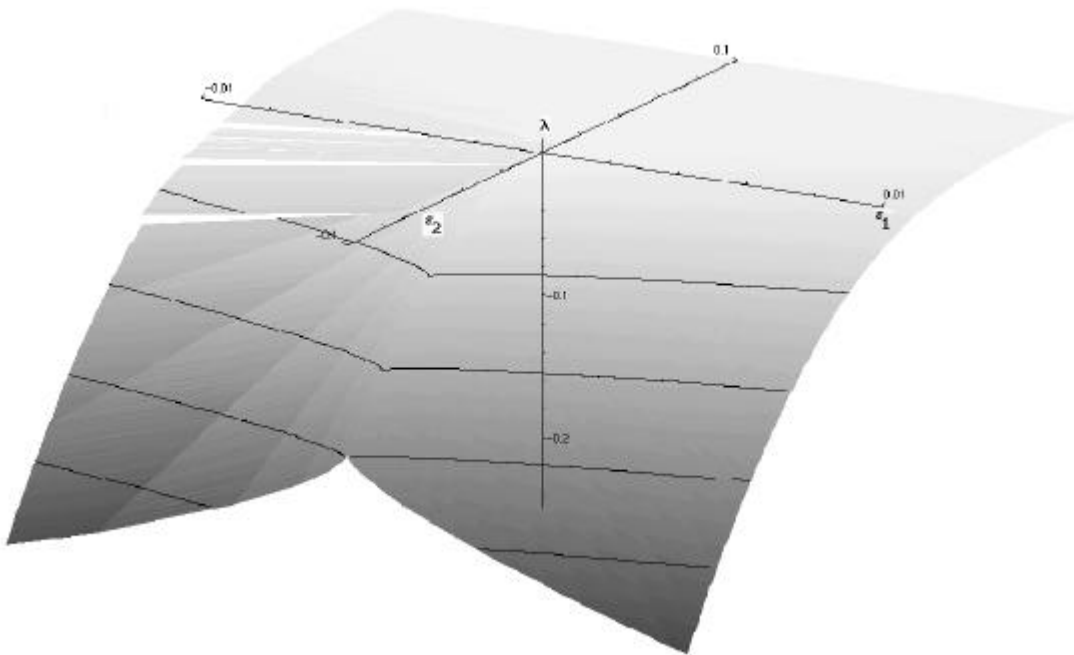
$$\begin{aligned} a &= 6p, \\ b &= -3p^2(2q^{-1} + q^2), \\ c &= -3p^2(2q + q^{-2}). \end{aligned} \quad (6)$$

A tökéletlen szerkezet energiafüggvényének leszámaztatásához egy lineáris koordináta-transzformációt alkalmazunk, melynek alakja:

$$\begin{aligned} X &= C_1 \cdot u + C_2 \cdot v + C_3, \\ Y &= C_4 \cdot u + C_5 \cdot v + C_6. \end{aligned} \quad (7)$$

Ezt behelyettesítjük a kanonikus alakba, majd az együtthatókat egyenlové tesszük az  $U$  függvény megfelelő együtthatóival. Ez négy harmadfokú, három másodfokú és két elsőfokú tag egyeztetését jelenti, hiszen a konstans nulladfokú tagokkal nem foglalkozunk. A kilenc feltételből kilenc ismeretlent: a  $C_i$  együtthatókat és a  $I$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  paramétereket tudjuk meghatározni az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  együtthatók függvényében. A tökéletlenségérzékenységi felületet úgy kapjuk, ha ebbe behelyettesítjük az elágazási halmaz  $(q, p)$  paraméterekkel kifejezett alakját:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (108 \cdot A)^{-1/6} \cdot \sqrt{B} \cdot 3 \cdot p^2 \cdot \left( -\frac{1}{q^2} + \frac{2}{q} + -2q + q^2 \right) \\ \mathbf{e}_2 &= -(2/A)^{1/3} \cdot B \cdot 4 \cdot p, \\ I &= -(A/2)^{1/3} \cdot 3 \cdot p^2 \cdot \left( 2 + \frac{1}{q^2} + \frac{2}{q} + 2q + q^2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$



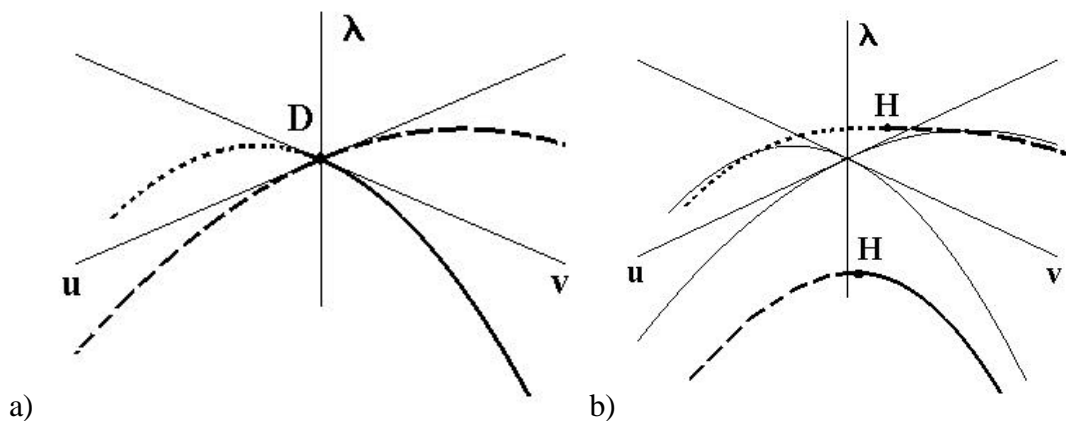
2. ábra: A tökéletlenségérzékenységi felület

A fenti képletekkel megadott felületekből minket csak az érdekel, ahol az energiafüggvény minimumpontja szunik meg. Ez a  $p \cdot q > 0$  feltétellel biztosítható ([10], 177. o.). Az így kapott felületet mutatja a 2. ábra. Ezen a negatív  $\varepsilon_2$  tökéletlenséghez tartozó metszetek csúcsos görbék, míg a pozitív  $\varepsilon_2$  tökéletlenséghez tartozó metszetek sima görbék. (Az ábrán alig látszik a görbületük).

Végül nézzük meg az egyensúlyi utakat! Az egyensúly feltétele az  $U$  gradiensének zérus volta:

$$\begin{aligned}
 U_x &= 2 \cdot B \cdot u \cdot v + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e}_1 = 0, \\
 U_y &= 3 \cdot A \cdot v^2 + B \cdot u^2 + I = 0.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

A 3.a. ábrán láthatók a tökéletes szerkezet egyensúlyi útjai, melyek alakja indokolja a dombteto elnevezést. A folytonos vonal az egyetlen stabilis ágat jelöli, melynél az energiafüggvénynek lokális minimuma van. Ennek folytatása olyan egyensúlyi helyzeteket ábrázol, melyben a függvénynek lokális maximuma van. Az oket keresztező görbe pontjaihoz tartozó energiafüggvénynek nyeregpontja van. A 3.b. ábrán a (vékonyabb vonallal rajzolt) tökéletesen kívül a tökéletlen szerkezet egyensúlyi útjai láthatók. Az egyensúlyi helyzetek a kis zavarok hatására is megtartják a tökéletes szerkezet közelükben lévő egyensúlyi helyzeteinek típusát, a típusok elválasztó pontjai, az egyensúlyi utak tetopontjai, az ún. ( $H$ ) határpontok.



3. ábra: Egyensúlyi utak a tökéletes (a) és egy tökéletlen (b) szerkezetnél

### 3. EGY KETTOS-CSÚCS TÍPUSÚ ELÁGAZÁSI PONT SZEMLÉLTETÉSE

Ezen katasztrófa-típus bemutatására a 4. ábrán látható szerkezetet használjuk. Ez egy egységnyi hosszúságú, végtelen merev rúdból áll, ami az alsó végpontjában csuklósan kapcsolódik a földhöz, a rúd felső végén egy, az  $x$  tengellyel mindig párhuzamosan álló rugót alkalmazunk megtámasztásként. A rudat az alsó végén megtámasztja egy spirálrugó is, amely az  $y$  tengely és a rúdtengely közti szög megváltozásával arányos nyomatékot fejt ki. A rúd felső végpontját egy  $\Lambda$  nagyságú függőleges erő terheli. Az erő egységét úgy választjuk, hogy  $c_1=1$  legyen, a második rugó merevségét jelölje  $c_2$ !

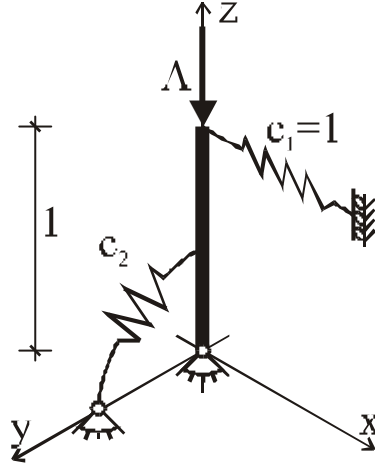
A szerkezet állapotváltozóinak válasszuk a felső végpont  $x$  és  $y$  koordinátáját! Így a potenciális energia függvényét az alábbi alakban írhatjuk:

$$V(x, y, \Lambda, c_2) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} c_2 \cdot \arcsin^2(y) + \Lambda \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2}
 \tag{10}$$

Ennek első deriváltjai:

$$V_x = x \cdot \left( 1 - \frac{\Lambda}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right),$$

$$V_y = c_2 \frac{\arcsin(y)}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{\Lambda \cdot y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \quad (11)$$



4. ábra: A kétrugós modell

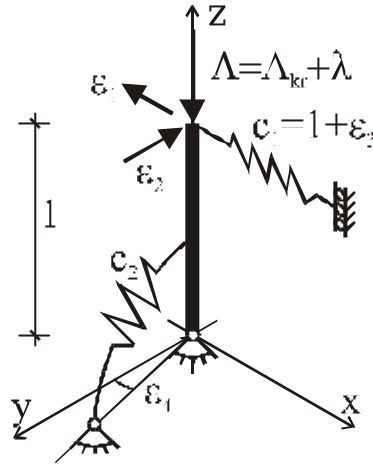
Egyensúlyi helyzetben az első deriváltak zérusok, tehát a triviális egyensúlyi út egyenlete:  $x=y=0$ . A triviális egyensúlyi úton is olyan kritikus pontot keresünk, amelyben a Hesse-mátrix minden eleme zérus. A feladat szimmetriája miatt az  $x=y=0$  egyenes pontjaiban a  $V_{xy}$  vegyes derivált nullával egyenlő. A  $V_{xx}=0$  feltételből  $L_{kr}=1$ , majd ennek segítségével  $V_{yy}=0$ -ból  $c_{2kr}=1$  adódik. E körül a kritikus pont körül fejtsük Taylor-sorba az energiafüggvényt, majd most a 4-szeret képezzük, ugyanis a Taylor-sor harmadfokú tagjai mind eltűnnek:

$$j^4 V(x, y, \Lambda_{kr}, c_{2kr}) = -\frac{1}{8} \left( x^4 + 2x^2 y^2 - \frac{1}{3} y^4 \right). \quad (12)$$

Mivel a fenti kifejezésnek két valós és két komplex gyöke van, ezért a függvény a 2. osztályba tartozik ([10], 247. o.). Az ilyen típusú katasztrófa elágazási halmazát nem tudjuk kezelni a katasztrófa teljes kinyitásához szükséges tökéletlenségek nagy száma miatt, ami az ábrázolás dimenzióját növeli meg túlságosan. Az előző példához képest további nehézség, hogy nem ismerjük az elágazási halmaz paraméteres alakját.

Azt mindenesetre megtehetjük, hogy felvesszünk független tökéletlenségeket, majd külön-külön megnézzük, hogy azok milyen változást okoznak a tökéletes szerkezet egyensúlyi útjában. Az általunk vizsgált szerkezetre az 5. ábrán látható tökéletlenségeket vesszük fel. Az első most is a teherparaméter változása ( $I=L-L_{kr}$ ), a második, illetve a harmadik egy-egy kicsiny vízszintes teher az  $x$ , illetve az  $y$  tengellyel párhuzamosan ( $e_1$ , illetve  $e_2$ ), a negyedik a vízszintes rugó merevségének eltérése a

kritikus értéktől ( $\mathbf{e}_3$ ), az ötödik pedig a spirálrugó elhelyezésének tökéletlensége ( $\mathbf{e}_4$ ), mely azt mutatja, hogy a rugó függőleges síkja milyen szöget zár be az  $yz$  síkkal.



5. ábra: A tökéletlenségek értelmezése

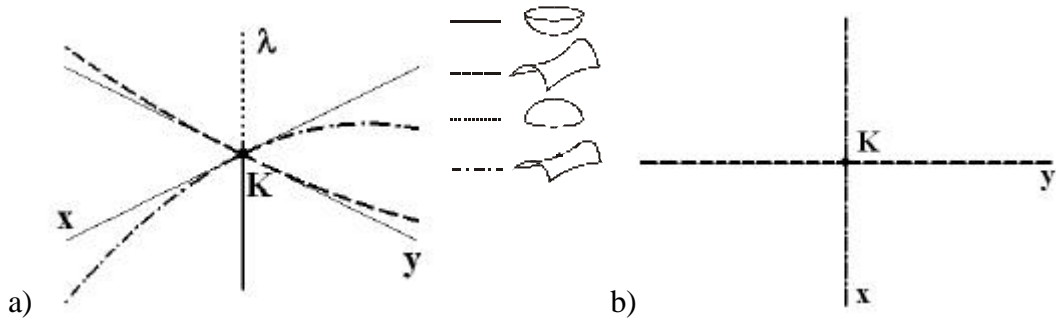
Az így kapott tökéletlen szerkezet potenciális energiafüggvényét Taylor-sorba fejtjük a kritikus pont közelében, majd a függvény lényeges tulajdonságait lokálisan leíró 4-szeletét  $U$ -val jelöljük:

$$\begin{aligned}
 U = & \mathbf{e}_1 x + \mathbf{e}_2 y + \frac{(\mathbf{e}_3 + \sin^2 \mathbf{e}_4 - \mathbf{I})}{2} x^2 + \frac{\sin 2\mathbf{e}_4}{2} xy + \frac{(-\sin^2 \mathbf{e}_4 - \mathbf{I})}{2} y^2 + \\
 & + \frac{(4 \sin^4 \mathbf{e}_4 - 3 - 3\mathbf{I})}{24} x^4 + \frac{(\sin^2 \mathbf{e}_4 \cdot \sin 2\mathbf{e}_4)}{3} xy^3 + \frac{(-\cos^2 2\mathbf{e}_4 - \mathbf{I})}{4} x^2 y^2 + \\
 & + \frac{(\cos^2 \mathbf{e}_4 \cdot \sin 2\mathbf{e}_4)}{3} x^3 y + \frac{(4 \cos^4 \mathbf{e}_4 - 3 - 3\mathbf{I})}{24} y^4.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Az egyensúlyi utakat most is abból a feltételből határozzuk meg, hogy az  $U$  gradiensének zérusnak kell lennie. Először a tökéletes szerkezet egyensúlyi útjait mutatjuk be a 6. ábrán. Az  $\mathbf{e}$  tökéletlenségek helyére 0-t behelyettesítve az  $U$  függvény parciális deriváltjaira az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}
 U_x = & -\mathbf{I}x - \frac{1+\mathbf{I}}{2} x^3 - \frac{1+\mathbf{I}}{2} xy^2, \\
 U_y = & -\mathbf{I}y - \frac{1+\mathbf{I}}{2} xy^2 + \frac{1-3\mathbf{I}}{6} y^3.
 \end{aligned} \quad (14)$$

A fenti két kifejezés az  $x=y=0$  egyenesen zérus lesz, ez a triviális egyensúlyi út. Az  $x=0$  síkban  $U_x=0$ , majd az  $x=0$ -t behelyettesítve  $U_y$ -ba  $\mathbf{I}$  kifejezhető  $y$  függvényeként. Hasonló módon az  $y=0$  síkban  $U_y=0$ , majd az  $y=0$ -t behelyettesítve  $U_x$ -ba  $\mathbf{I}$  kifejezhető  $x$  függvényeként. Ezt a három megoldást mutatja a 6. ábra.



6. ábra: A tökéletes szerkezet egyensúlyi útjai axonometrikus nézetben (a), felülnézetben (b)

Itt, és a későbbiekben is, folytonos vonallal a stabilis állapotokat jelöltük, a többi állapot labilis. A szaggatott vonal pontjainál az energiafüggvény Hesse-mátrixának egy pozitív és egy negatív, a pontokból álló vonalnál két negatív, a pontokból és vonalkákból álló görbe pontjainál egy zérus és egy negatív sajátértéke van. A zérus sajátérték azt jelenti, hogy az egyensúlyi út minden pontja kritikus. A zérus sajátértékhez tartozó metszetben negyedfokú az első el nem tűnő tag, az pozitív, tehát standard csúcscatasztrófa van a görbe minden pontjában, és ebben a metszetben valóban minimuma van a görbének. A 6.a. ábrán az egyensúlyi utak mellett feltüntettük az energiafüggvények egy-egy tipikus alakját is.

A tökéletlenségek hatását külön-külön fogjuk megvizsgálni. Először az  $e_1$  tökéletlenséget nézzük meg, míg a másik három tökéletlenséget nullának vesszük. Ekkor az  $U$  függvény deriváltjai az alábbi alakot öltik:

$$U_x = e_1 - Ix - \frac{1+I}{2}x^3 - \frac{1+I}{2}xy^2, \quad (15)$$

$$U_y = -Iy - \frac{1+I}{2}xy^2 + \frac{1-3I}{6}y^3.$$

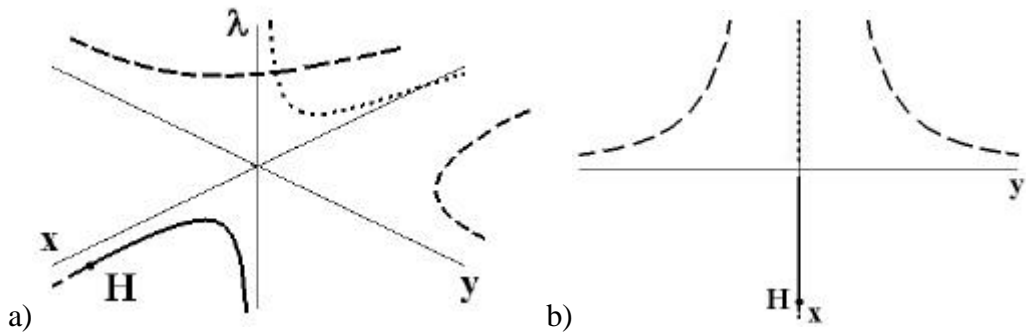
Az egyensúlyi utak  $xy$ -síkra való vetületét a két derivált segítségével megadhatjuk, ha kiejtjük a  $I$ -t:

$$U_{xy} - U_{yx} = y \left( e_1 - \frac{2}{3}xy^2 \right). \quad (16)$$

Az egyensúlyi helyzetekben  $U_x=U_y=0$ , vagyis a fenti kifejezésnek is nullának kell lennie. Vagyis egyensúlyi út az  $y=0$ , illetve az  $x=3e_1/y^2$  felületen lehetséges. Ezeket visszahelyettesítve  $U_x$ -be, illetve  $U_y$ -ba  $I$  most is kifejezhető  $x$ , illetve  $y$  függvényében. Az így kapott egyensúlyi utakat mutatja a 7. ábra. Látszik, hogy az egyensúlyi út itt szétesett négy független útra.

Az eredetileg stabilis állapot a teherparaméter növelésekor egy  $H$ -val jelzett határpontnál veszti el a stabilitását. A tökéletlenség hatására az  $x>0$  szakaszon a zérus sajátérték pozitívvá válik, így az energiafüggvénynek a vizsgált pont környezetében egyetlen nyeregpontja lett, az  $x<0$  szakaszon a zérus sajátérték negatív lett, ezért megháromszorozódott az egyensúlyi helyzetek száma, két nyeregpont és egy lokális maximumpont keletkezett.





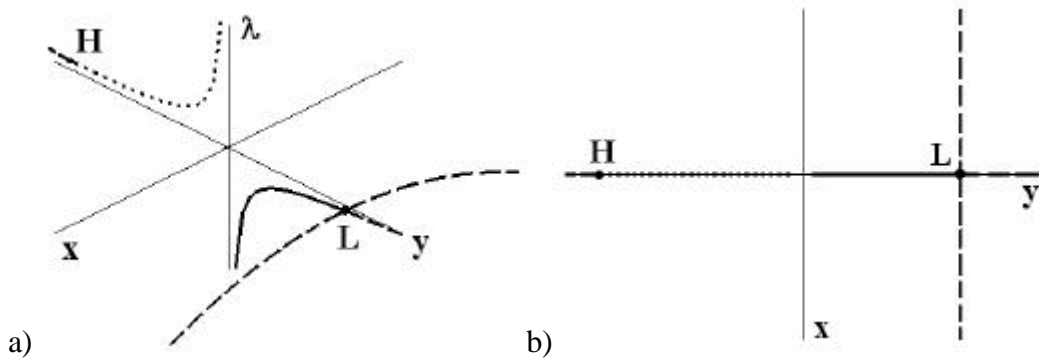
7. ábra: Egyensúlyi utak ( $\epsilon_1 < 0$ ) axonometrikus nézetben (a), felülnézetben (b)

Az  $e_2$  tökéletlenség hatását ugyanezzel a módszerrel vizsgálhatjuk. (A másik három tökéletlenséget most is nullának vesszük.) Az  $U$  függvény deriváltjai most az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned}
 U_x &= -Ix - \frac{1+I}{2}x^3 - \frac{1+I}{2}xy^2, \\
 U_y &= e_2 - Iy - \frac{1+I}{2}xy^2 + \frac{1-3I}{6}y^3.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Most is megadjuk az egyensúlyi utak  $xy$ -síkra való vetületét:

$$U_{xy} - U_{yx} = x \left( -e_2 - \frac{2}{3}y^3 \right).
 \tag{18}$$



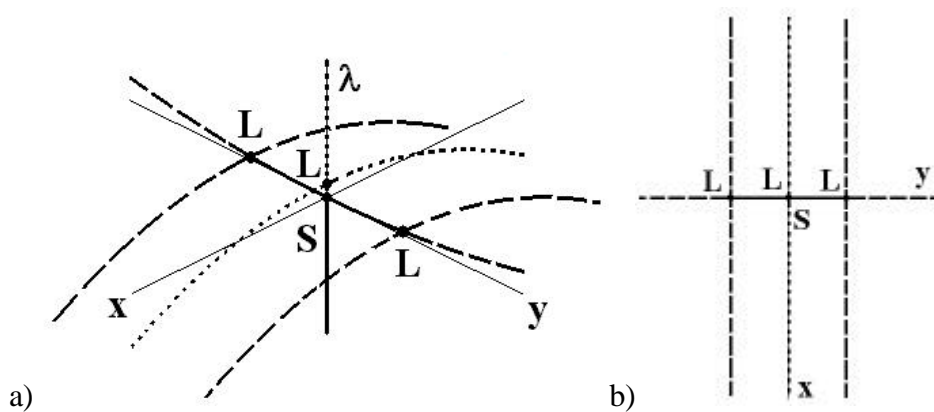
8. ábra: Egyensúlyi utak ( $e_2 < 0$ ) axonometrikus nézetben (a), felülnézetben (b)

Az egyensúlyi helyzetekben  $U_x = U_y = 0$ , vagyis a fenti kifejezésnek is nullának kell lennie. Vagyis egyensúlyi út az  $x=0$ , illetve az  $y = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}e_2}$  felületen lehetséges. Ezeket visszahelyettesítve  $U_y$ -be, illetve  $U_x$ -ba  $I$ -t kifejezzük  $y$ , illetve  $x$  függvényében. Az így kapott egyensúlyi utakat mutatja a 8. ábra. Az egyensúlyi út most nem esett szét teljesen, egy  $L$ -vel (labilis szimmetrikus elágazás) jelölt elágazási pont megmaradt a kritikus pont közelében. A kapott határpont két labilis szakaszt választ el.

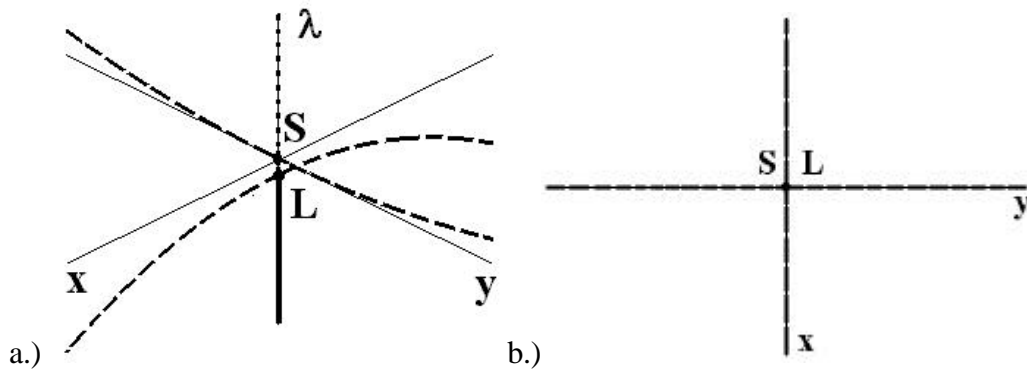
Az  $e_3$  tökéletlenség hatása némileg eltér az elozo kettőtől. (A másik három tökéletlenséget most is nullának vesszük.) Az  $U$  függvény deriváltjaival itt is megadható az egyensúlyi utak  $xy$ -síkra való vetülete:

$$U_{xy} - U_{yx} = xy \left( \mathbf{e}_3 - \frac{2}{3} y^2 \right). \quad (19)$$

Az egyensúlyi helyzetekben  $U_x=U_y=0$ , vagyis a fenti kifejezésnek is nullának kell lennie. Vagyis egyensúlyi út az  $x=0$ , vagy az  $y=0$ , illetve az  $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{e}_3}$  felületen lehetséges. Ezeket visszahelyettesítve  $U_y$ -ba,  $U_x$ -be, illetve  $U_x$ -be  $I$ -t kifejezzük  $y$ ,  $x$ , illetve  $x$  függvényében. A harmadik felület azonban most csak pozitív  $\mathbf{e}_3$  esetén létezik. Az így kapott egyensúlyi utakat mutatja a 9. ábra. Amint látható, az egyetlen elágazási pont helyett négyet (három labilis és egy (S-sel jelölt) stabilis szimmetrikus elágazási pontot) is találunk az eredeti elágazás kis környezetében. A triviális egyensúlyi úton a két elágazási pont között az energiafüggvénynek nyeregpontja van. Az  $y=0$  síkban fekvő egyensúlyi út pontjaiban a tökéletes szerkezetnél eredetileg zérusnak adódott sajátérték végig negatív lett, ezért háromszorozódott meg az eredeti görbe.



9. ábra: Egyensúlyi utak ( $\epsilon_3 > 0$ ) axonometrikus nézetben (a), felülnézetben (b)

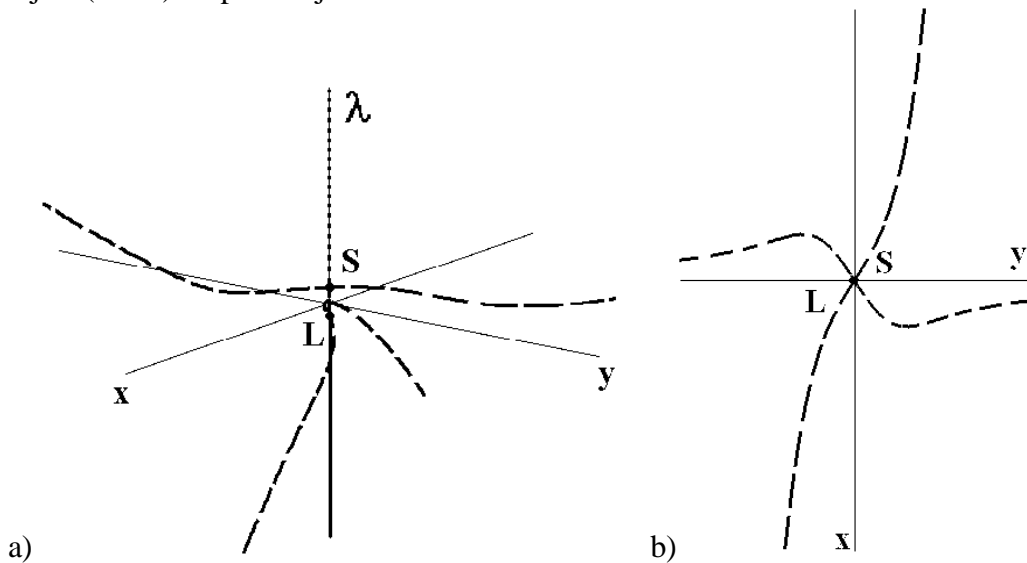


10. ábra: Egyensúlyi utak ( $\epsilon_3 < 0$ ) axonometrikus nézetben (a), felülnézetben (b)

A 10. ábrán negatív  $\mathbf{e}_3$ -nál létrejövő egyensúlyi utakat rajzoltunk fel. Itt a korábbi kettős elágazási pont két különálló elágazási pontra esett szét. A triviális egyensúlyi úton a két elágazási pont között az energiafüggvénynek most is nyeregpontja van. Az  $y=0$  síkban fekvő egyensúlyi út pontjaiban a tökéletes szerkezetnél eredetileg

zérusnak adódott sajátérték végig pozitív lett, ezért az eredetileg kritikus pontokat tartalmazó görbe egy normális egyensúlyi helyzetekhez tartozó görbévé vált.

Az  $e_4$  tökéletlenség vizsgálatához a másik három tökéletlenséget most is nullának vesszük. Az  $U$  függvény deriváltjaiból megállapítható, hogy az  $x=y=0$  triviális megoldás az egyensúlyi út része, és megadható az egyensúlyi utak  $xy$ -síkra való vetülete is, mely azonban az összes negyedfokú tagot is tartalmazza, így nem írható fel a pontos megoldása. Kirajzolható azonban az  $xy$ -síkbán (11.b. ábra). Mint látjuk, az eredetileg egyenes utak eltorzultak. Az egyensúlyi utak térbeli alakját csak numerikusan tudtuk meghatározni. A 11.a. ábrán látszik, hogy az elágazási pont is kettévált,  $I = \pm \sin e_4$ -nél következik be egy labilis, illetve egy stabilis elágazás. A tökéletes szerkezetnél elfajult, háromszoros egyensúlyi út újra egyetlen görbévé vált, amelynek pontjai azonban már nem elfajuló (labilis) állapotokat jelölnek.



11. ábra: Egyensúlyi utak ( $e_4 < 0$ ) axonometrikus nézetben (a), felülnézetben (b)

Megállapítható, hogy bár a kettoscsúcs-katasztrófák esetében a vizsgált típus tipikus, hiszen [10] 4-3. táblázata szerint ezen osztály pontjainak halmazának dimenziója megegyezik a kétváltozós homogén negyedfokú polinom együtthatóinak számával, a katasztrófpont a köldökszerű katasztrófnál sokkal bonyolultabb. A kettoscsúcs-katasztrófák Thom tételében még nem szerepelnek, mert tipikus létrejöttükhöz öt paraméter még nem elegendő. Mi csak négy speciális tökéletlenség egyenkénti hatását vizsgáltuk, és ezzel is nagyon különböző egyensúlyi utak voltak létrehozhatók.

Megjegyezzük azt is, hogy a 6. ábrán a tökéletes szerkezet egyensúlyi útjain egy háromszoros megoldási görbét is rajzoltunk. Ez a jelenség hasonló ahhoz, amikor a háromrugós térbeli modellnél ([10] 241-246. oldalak) a szimbolikusköldök-katasztrófánál kétszeres, a háromszoros gyök alosztályánál háromszoros egyensúlyi út jelent meg. Azoknál a magasabbfokú tagok hatására ez a degeneráltság megszűnt ([10] 4-58. ábra, [14]).

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ez a kutatás az FKFP 0308/2000 és 0177/2001 kutatási projektek támogatásával készült.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] Halász O.: *Acélszerkezetek III/1. Stabilitáselmélet*, Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem jegyzete, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [2] Halász O. - Iványi M.: *Stabilitáselmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.
- [3] Koiter, W. T.: *On the stability of elastic equilibrium*, Dissertation, Delft, 1945. (Angol fordítás: NASA, Tech. Trans., F 10, 833, 1967)
- [4] Augusti, G.: *Stabilità di strutture elastiche elementari in presenza di grandi spostamenti*, *Atti Accad. Sci. fis. mat.*, Napoli, Serie 3, Vol. 4, No. 5, 1964.
- [5] Thompson, J. M. T. - Hunt, G. W.: *A general theory of elastic stability*, Wiley, London, 1973.
- [6] Thompson, J. M. T. - Hunt, G. W.: *Towards a unified bifurcation theory*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 26, 1975, pp. 581...604.
- [7] Thom, R.: *Stabilité structurelle et morphogenese*, Benjamin, New York, 1972. (Angol fordítás: *Structural stability and morphogenesis*, Benjamin, New York, 1975)
- [8] Poston, T. - Stewart, I. N.: *Catastrophe theory and applications*, Pitman, London, 1978.
- [9] Gáspár, Zs.: *Buckling model for a degenerated case*. *Newsletter* 2(4), 1984, pp. 5...8.
- [10] Gáspár Zs.: *A katasztrófaelmélet alkalmazása a szerkezetek stabilitásvizsgálatában*, 4. fejezet Kollár L. (szerk.): *A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.
- [11] Thompson, J. M. T. - Gáspár, Zs.: *A buckling model for the set of umbilic catastrophes*, *Mathematical Proc. of Cambridge Phil. Soc.*, 82, 1977, pp. 497...507.
- [12] Gáspár Zs.: *Buckling models for higher catastrophes*, *J. of Structural Mechanics*, 5, 1977, pp. 357...368.
- [13] Thompson, J. M. T. - Hunt, G. W.: *Elastic instability phenomena*, Wiley, Chichester, 1984.
- [14] Pajunen, S. – Gáspár, Zs.: *Study of an interactive buckling model – from local to global approach*, *Proceedings of the 2nd International Conf. On „Coupled Instabilities in Metal Structures”*, CIMS '96, (Eds: J. Rondal, D. Dubina, V. Gioncu), Imperial College Press, London, 1996, pp. 35...42.